

様相論理 N の計算複雑性

CS32 富永浩平
神戸大学システム情報学研究科

ALGI 37 (2026)
2026 年 8 月 24 日

導入

- Cook–Levin の定理による SAT の NP 完全性等を含め、論理と計算複雑性には深い関わりがあることが知られる。
- 様相論理でも、(Ladner, 1977) に端を発し様々な様相論理の計算複雑性が調べられている。
- 様相論理 N は (Fitting et al., 1992) により導入された、様相論理の言語におけるトートロジーに規則として MP, 一様代入, 必然化則 ($\frac{\varphi}{\Box\varphi}$) のみを追加した論理である。
- N は NP 完全な論理である古典命題論理 CI と PSPACE 完全な論理である様相論理 K の間に位置する。
- 本研究ではこの N に関する論理の計算複雑性を特定した。

目次

- ① 背景 1 : 様相論理 N
- ② 背景 2: 計算複雑性
- ③ N の計算複雑性

目次

① 背景 1 : 様相論理 N

② 背景 2: 計算複雑性

③ N の計算複雑性

様相論理 K と様相論理 N

様相論理 K

- | | |
|----|---|
| 公理 | <ul style="list-style-type: none">様相論理の言語でのトートロジー全体K: $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$ |
| 規則 | <ul style="list-style-type: none">Modus Ponens必然化則 (Nec): $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$一様代入 |

様相論理 N (Fitting et al., 1992)

- | | |
|----|--|
| 公理 | <ul style="list-style-type: none">様相論理の言語でのトートロジー全体 |
| 規則 | <ul style="list-style-type: none">Modus Ponens必然化則 (Nec): $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$一様代入 |

N の拡張論理

- 証明可能性論理の文脈から (Kurahashi, 2024) や (Kogure and Kurahashi, 2025) は以下の N の拡張を導入.

- Np^1 は N に公理 $p : \neg\Box\perp$ を追加した論理.
- NR は N に規則 (Ros) : $\frac{\neg\varphi}{\neg\Box\varphi}$ を追加した論理.
- ND は N に公理 $D : \neg(\Box\varphi \wedge \Box\neg\varphi)$ を追加した論理.

命題

$Np \subseteq NR \subseteq ND$

これらの包含関係は真な包含関係.

Remark

- K に上の公理・規則を追加した論理は全て KD に一致.

¹ (Kogure and Kurahashi, 2025) では NP として導入されている.

目次

① 背景 1 : 様相論理 N

② 背景 2: 計算複雑性

③ N の計算複雑性

背景 2. 計算複雑性

L, M を集合とする.

帰着可能

L は M に帰着可能 ($L \leq_{\log} M$) : $\iff$

$\exists f$: 対数領域計算可能関数 s.t. $x \in L \iff f(x) \in M$.

困難性と完全性

複雑性クラス C に対し,

- L が C 困難である : $\iff C$ の任意の問題が L に帰着可能.
- L が C 完全である : $\iff$ 以下の二つを満たす.
 - (Upper bound) : L は C に含まれる.
 - (Lower bound) : L は C 困難
- 本研究では複雑性クラスとして $P, NP, PSPACE$ を主に扱う.

背景 2. 論理の計算複雑性

充足可能性判定問題

Given : 論理式 φ

Question : 論理 L で φ は充足可能 ($L \models \neg\varphi$) か?

Cook-Levin の定理 (Cook, 1971), (Levin, 1973)

CI の充足可能性判定問題 (SAT) は NP 完全.

- 単一様相論理の計算複雑性は NP と PSPACE の境界の状況に深く関わる.

定理 (Ladner, 1977)

K, KT, S4 は PSPACE 完全. S5 は NP 完全.

正規様相論理全体の計算複雑性の状況

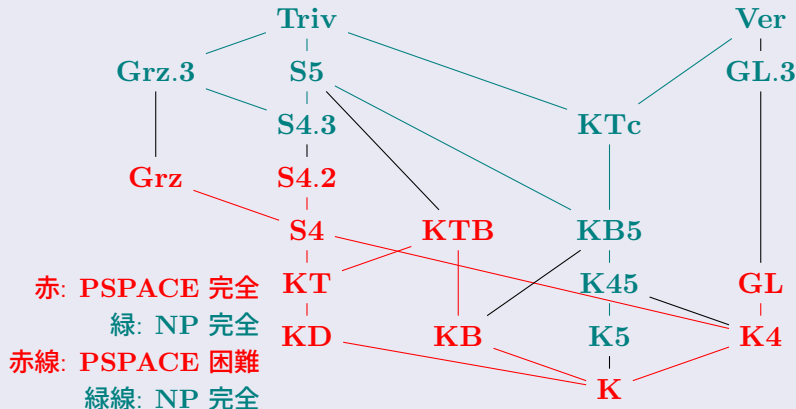


Figure: 制限のない場合の正規様相論理の計算複雑性

背景 2. 制限のある計算複雑性

- 論理式に様々な制限を課した場合の複雑性も調べられている。

論理式の制限の例

- 使用する演算子 ($\wedge$ のみに制限等)
- 論理式の形 (ホーン節等)
- 命題変数の個数
 - 命題変数なし (closed fragment)

背景 2. Closed fragment

Closed fragment の充足可能性判定問題

Given : 閉論理式 φ

Question : 論理 L で φ は充足可能 ($L \models \neg\varphi$) か?

Closed fragment の計算複雑性の状況

Logic	制限なし	closed fragment
CI	NP 完全	P
K	PSPACE 完全	PSPACE 完全 ¹
GL	PSPACE 完全	P ¹

ただし GL は K に公理 $\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$ を追加した論理。

- 制限のない計算複雑性とも組み合わせて考察することでその論理の特性を見出すことができる。

¹ (Chagrov and Rybakov, 2003) による結果

研究課題. N の計算複雑性の状況

Logic	制限なし	closed fragment
CI	NP 完全	P
N	???	???
K	PSPACE 完全	PSPACE 完全
Np	???	???
NR	???	???
ND	???	???
KD	PSPACE 完全	P

- N は K と CI の中間にある論理であり、
NP 完全性と PSPACE 完全性の二つの論理の狭間に位置.

研究課題. N の計算複雑性の状況

Logic	制限なし	closed fragment
CI	NP 完全	P
N	???	???
K	PSPACE 完全	PSPACE 完全
Np	???	???
NR	???	???
ND	???	???
KD	PSPACE 完全	P

問題

- 論理 N や N の拡大では計算複雑性の状況は？
K や KD と比べてどう変化するか。
 - 必然化則 (Nec) は計算複雑性にどのような影響があるのか。
- closed fragment の複雑性の状況は？

研究結果

$N \oplus \gamma$ を N に論理式 γ を公理として追加した論理とする.

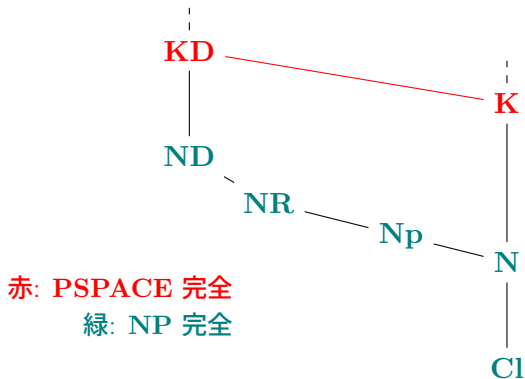
主結果

γ を閉論理式とし, $N \oplus \gamma$ は無矛盾であるとする.

Logic	制限なし	closed fragment
N	NP 完全	NP 完全
$N \oplus \gamma$	NP 完全	NP 完全
NR	NP 完全	P
ND	NP 完全	P

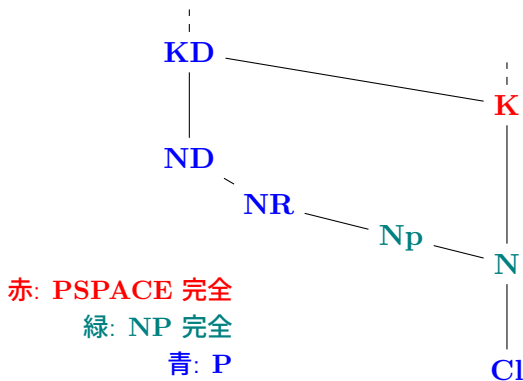
研究結果

制限なしの場合の計算複雑性の状況



研究結果

Closed fragment の場合の計算複雑性の状況



目次

① 背景 1 : 様相論理 N

② 背景 2: 計算複雑性

③ N の計算複雑性

N の計算複雑性

γ を閉論理式とする.

Logic	制限なし	closed fragment
N	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
$N \oplus \gamma$	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
NR	NP 完全 [U / L]	P
ND	NP 完全 [U / L]	P

N の計算複雑性

γ を閉論理式とする.

Logic	制限なし	closed fragment
N	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
$N \oplus \gamma$	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
NR	NP 完全 [U / L]	P
ND	NP 完全 [U / L]	P

命題

論理 L が CI の保存拡大ならば, L は NP 困難.

N の計算複雑性

γ を閉論理式とする.

Logic	制限なし	closed fragment
N	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
$N \oplus \gamma$	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
NR	NP 完全 [U / L]	P
ND	NP 完全 [U / L]	P

命題

無矛盾な論理 L が (Nec) と (Ros) で閉じている時,
閉論理式 δ に対し, $L \vdash \delta \iff \text{CI} \vdash \delta^-$.

ただし, δ^- は δ の $\Box$ を除外して得られる命題論理式.

N の計算複雑性

γ を閉論理式とする。

Logic	制限なし	closed fragment
N	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
$N \oplus \gamma$	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
NR	NP 完全 [U / L]	P
ND	NP 完全 [U / L]	P

残りの箇所の証明には意味論を利用する。

N はクリプキ意味論が使えないので、

N のための意味論 FMT-モデルを利用する。

FMT-モデルの具体的な定義

Var を様相論理の命題変数全体の集合,
MF を様相論理式全体の集合とする.

定義 (FMT-モデル) (Fitting et al., 1992)

以下を満たす 3 つ組 $(W, \{\prec_\psi\}_{\psi \in \text{MF}}, V)$ を FMT-モデルと呼ぶ.

- W は非空集合である.
- $\psi \in \text{MF}$ に対し, 各 $\prec_\psi$ は W 上の二項関係である.
- $V : W \times \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ は命題変数への真理値割当て.

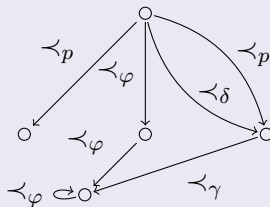
V を $W \times \text{MF} \rightarrow \{0, 1\}$ に自然に拡張する. 特に $\Box$ は以下.

- $V(w, \Box\psi) = 1 : \iff \forall w' \in W (w \prec_\psi w' \implies V(w', \psi) = 1).$
- w で $\Box\psi$ が正しい : $\iff w$ の ψ -関係の行き先全てで ψ が正しい.

FMT-モデル

FMT-モデル (Fitting et al., 1992)

- 様相論理 N の意味論.
- 有向グラフ中の各頂点に真理値割当を与え, 関係に論理式を紐づける.



N-モデルの例

- 点 w で $\Box\psi$ が正しい : $\iff w$ の ψ -関係の行き先全てで ψ が正しい.

様相論理 N と FMT-モデル

以下の記法を導入する.

- $M, w \models \varphi : \iff V(w, \varphi) = 1$
- $M \models \varphi : \iff$ 任意の $w \in W$ で $M, w \models \varphi$
- $M \models \Gamma : \iff$ 任意の $\varphi \in \Gamma$ で $M \models \varphi$

定理 (Fitting et al., 1992, Theorem. 3.6)

Γ を様相論理式の集合とする. この時, 以下は同値である.

- $N \oplus \Gamma \vdash \varphi$
- φ は 任意の FMT-モデル M において $M \models \Gamma$ ならば $M \models \varphi$

N の計算複雑性

- $\sigma_{\gamma,i} := \neg\gamma \vee \underbrace{\perp \vee \cdots \vee \perp}_i$ とする.
- FMT-モデルを利用した議論から, $N \oplus \gamma$ の上で閉論理式 $\Box(\sigma_{\gamma,i})$ が命題変数のように振る舞うと判明.

定理

命題論理式 $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ に対し $\varphi^\perp := \varphi(\Box(\sigma_{\gamma,1}), \dots, \Box(\sigma_{\gamma,n}))$ とする. この時, γ が閉論理式, $N \oplus \gamma$ が無矛盾であるならば, 任意の命題論理式 φ に対し以下は同値.

- φ が CI で充足可能.
- $\varphi^\perp$ が $N \oplus \gamma$ で充足可能.

系

γ が閉論理式, $N \oplus \gamma$ が無矛盾であるならば, $N \oplus \gamma$ の closed fragment は NP 困難.

N の計算複雑性

γ を閉論理式とする。

Logic	制限なし	closed fragment
N	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
$N \oplus \gamma$	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
NR	NP 完全 [U / L]	P
ND	NP 完全 [U / L]	P

系

γ が閉論理式， $N \oplus \gamma$ が無矛盾であるならば， $N \oplus \gamma$ の closed fragment は NP 困難。

N の計算複雑性

- 論理 $L \in \{N, N \oplus \gamma, NR, ND\}$ の FMT-モデルでの論理式 φ の充足可能性判定の様子を命題論理式で $B_L(\varphi)$ として再現することで以下が得られる。

定理

任意の命題論理式 φ に対し以下は同値。

- φ が L で充足可能。
- $B_L(\varphi)$ が CI で充足可能。
- B_L は $\square$ の入れ子に関する帰納的な定義で定められており、対数領域計算可能。

系

論理 $L \in \{N, N \oplus \gamma, NR, ND\}$ とする。
 L は NP に含まれる。

N の計算複雑性

γ を閉論理式とする.

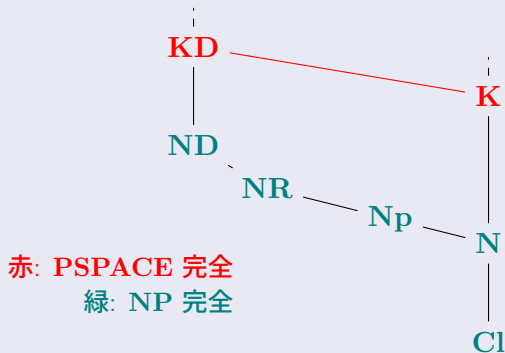
Logic	制限なし	closed fragment
N	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
$N \oplus \gamma$	NP 完全 [U / L]	NP 完全 [U / L]
NR	NP 完全 [U / L]	P
ND	NP 完全 [U / L]	P

系

論理 $L \in \{N, N \oplus \gamma, NR, ND\}$ とする.
 L は NP に含まれる.

まとめと考察

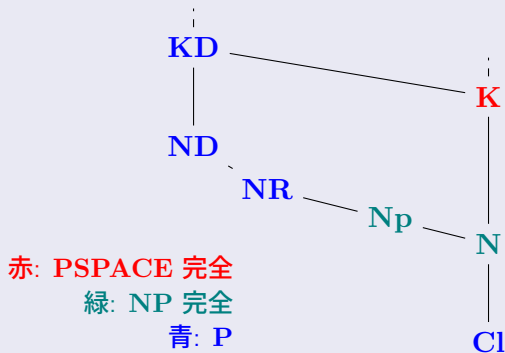
制限なしの場合の計算複雑性の状況



- N は K と比べて複雑性が低下.
- K 公理が複雑性の上昇に強く関与.

まとめと考察

Closed fragment の場合の計算複雑性の状況



- Closed fragment では N_p と NR の間に差。

Future Work

N の閉論理式公理以外による拡大の計算複雑性

N に以下の公理・規則を追加した論理の計算複雑性はどうか。

- 公理 4: $\Box p \rightarrow \Box \Box p$.
- 公理 $\text{Acc}_{m,n}$: $\Box^n p \rightarrow \Box^m p$
- 公理 C: $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$

N に対する他の意味論からのアプローチ

- (Kogure and Kurahashi, 2026) で N を含めた多くの様相論理を扱う新たな意味論として closure model が提案されている。

各論理の区間の状況

- 例えば, $\text{NR} \subseteq L \subseteq \text{ND}$ を満たす論理は全て NP 完全か？
それとも PSPACE 困難な論理が存在するか？

参考文献 I

- [Chagrov and Rybakov, 2003] Chagrov, A. and Rybakov, M. (2003).
How Many Variables Does One Need to Prove PSPACE-hardness of Modal Logics.
In Advances in Modal Logic. Vol. 4, pages 71–82. King's Coll. Publ., London.
- [Cook, 1971] Cook, S. A. (1971).
The complexity of theorem-proving procedures.
In Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing,
Stoc '71, pages 151–158, New York, NY, USA. Association for Computing
Machinery.
- [Fitting et al., 1992] Fitting, M. C., Marek, V. W., and Truszczyński, M. (1992).
The Pure Logic of Necessitation.
Journal of Logic and Computation, 2(3):349–373.
- [Kogure and Kurahashi, 2025] Kogure, H. and Kurahashi, T. (2025).
Modal logical aspects of provability predicates and consistency statements.
- [Kogure and Kurahashi, 2026] Kogure, H. and Kurahashi, T. (2026).
Modal logics of conjunctively closed provability predicates.

参考文献 II

[Kurahashi, 2024] Kurahashi, T. (2024).

The provability logic of all provability predicates.

Journal of Logic and Computation, 34(6):1108–1135.

[Ladner, 1977] Ladner, R. E. (1977).

The Computational Complexity of Provability in Systems of Modal Propositional Logic.

SIAM Journal on Computing, 6(3):467–480.

[Levin, 1973] Levin, L. A. (1973).

Universal enumeration problems.

Problemy Peredači Informacii, 9(3):115–116.

$B_L(\varphi)$ の具体的な仕様

b を様相論理の命題変数でない命題変数とする。

様相論理式全体の集合 MF に対し、

MF^* を様相論理式の列全体の集合とする。

$Var^+ := \{p^s \mid p \in Var \ \& \ s \in MF^*\} \cup \{b^s \mid s \in MF^*\}$ とする。

○ 変換

$\varphi \in MF$ と $s \in MF^*$ とする。

Var^+ を命題変数とした命題論理式 $(\varphi, s)^\circ$ を以下で定義する。

- $(p, s)^\circ := p^s$
- $(\perp, s)^\circ := \perp$
- $(\varphi \rightarrow \psi, s)^\circ := (\varphi, s)^\circ \rightarrow (\psi, s)^\circ$
- $(\neg\varphi, s)^\circ := \neg(\varphi, s)^\circ$
- $(\Box\varphi, s)^\circ := b^{s+\varphi}$

様相論理式 φ に対し、 $Sfc(\varphi)$ を φ 中で他の $\Box$ の入れ子の中に入っていない $\Box\psi$ の形をした φ の部分論理式全体の集合とする。

$B_L(\varphi)$ の具体的な仕様

B_N 変換

$B_N(\varphi, s)$ を以下で帰納的に定義する.

$$B_N(\varphi, s) := (\varphi, s)^\circ \wedge \bigwedge_{\Box\psi \in \text{Sfc}(\varphi)} (b^{s+\psi} \vee B_N(\neg\psi, s+\psi))$$

$B_{N\oplus\gamma}$ 変換

$B_{N\oplus\gamma}(\varphi, s)$ を以下で帰納的に定義する.

$$B_{N\oplus\gamma}(\varphi, s) := (\varphi, s)^\circ \wedge (\gamma, s)^\circ \wedge \bigwedge_{\Box\psi \in \text{Sfc}(\varphi)} (b^{s+\psi} \vee B_{N\oplus\gamma}(\neg\psi, s+\psi))$$

- 特に s として空列 ϵ を与えて, 対数領域計算可能な帰着関数を得る.

$B_L(\varphi)$ の具体的な仕様

X を命題論理式とする.

B_{NR} 変換

$B_{NR}(\varphi, s; X)$ を以下で帰納的に定義する.

$$B_{NR}(\varphi, s; X) := (X \leftrightarrow (\varphi, s)^\circ) \wedge \bigwedge_{\Box\psi \in \text{Sfc}(\varphi)} (B_{NR}(\psi, s + \psi; b^{s+\psi}))$$

B_{ND} 変換

$B_{N\oplus\gamma}(\varphi, s; X)$ を以下で帰納的に定義する.

$$B_{ND}(\varphi, s; X) := (X \leftrightarrow (\varphi, s)^\circ) \wedge \bigwedge_{\Box\psi \in \text{Sfc}(\varphi)} (\neg(b^{s+\psi} \wedge b^{s+\neg\psi})) \wedge B_{ND}(\psi, s + \psi; b^{s+\psi})$$

- s を空列 ϵ , X を $\top$ として対数領域計算可能な帰着関数を得る.