

Complexity of the pure logic of necessitation

CS32 富永浩平
神戸大学システム情報学研究科

2026 年度秋季総合分科会 (神戸大学)
2026 年 9 月 4 日 (金)

導入

- (Ladner, 1977) に端を発し
様々な様相論理の計算複雑性が調べられている。
- 様相論理 N は (Fitting et al., 1992) により導入された、
様相論理の言語におけるトートロジーに規則として
MP, 一様代入, 必然化則 ($\frac{\varphi}{\Box\varphi}$) のみを追加した論理である。
- 本研究ではこの様相論理 N とそのいくつかの拡大の
計算複雑性を特定した。

目次

- ① 背景 1 : 様相論理 N
- ② 背景 2: 論理の計算複雑性
- ③ 研究結果

目次

- ① 背景 1 : 様相論理 N
- ② 背景 2: 論理の計算複雑性
- ③ 研究結果

様相論理 K と様相論理 N

様相論理 K

- | | |
|----|---|
| 公理 | <ul style="list-style-type: none">● 様相論理の言語でのトートロジー全体● K: $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$ |
| 規則 | <ul style="list-style-type: none">● Modus Ponens● 必然化則 (Nec): $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$● 一様代入 |

様相論理 N (Fitting et al., 1992)

- | | |
|----|--|
| 公理 | <ul style="list-style-type: none">● 様相論理の言語でのトートロジー全体 |
| 規則 | <ul style="list-style-type: none">● Modus Ponens● 必然化則 (Nec): $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$● 一様代入 |

- N は K から公理 K を除外した論理.

様相論理 N の意味論 FMT-モデル

Var を様相論理の命題変数全体の集合,
MF を様相論理式全体の集合とする.

定義 (FMT-モデル) (Fitting et al., 1992)

以下を満たす 3 つ組 $(W, \{\prec_{\psi}\}_{\psi \in \text{MF}}, V)$ を FMT-モデルと呼ぶ.

- W は非空集合である.
- $\psi \in \text{MF}$ に対し, 各 $\prec_{\psi}$ は W 上の二項関係である.
- $V : W \times \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ は命題変数への真理値割当て.

V を $W \times \text{MF} \rightarrow \{0, 1\}$ に自然に拡張する. 特に $\Box$ は以下.

- $V(w, \Box\psi) = 1 : \iff \forall w' \in W (w \prec_{\psi} w' \implies V(w', \psi) = 1).$

定理 (Fitting et al., 1992)

様相論理 N とその拡張は FMT-モデルに対し健全かつ完全.

N の拡張論理

- 証明可能性論理の文脈から (Kurahashi, 2024) や (Kogure and Kurahashi, 2025) は以下の N の拡張を導入.
- Np^1 は N に公理 $p : \neg \Box \perp$ を追加した論理.
- NR は N に規則 (Ros) : $\frac{\neg \varphi}{\neg \Box \varphi}$ を追加した論理.
- ND は N に公理 $D : \neg(\Box p \wedge \Box \neg p)$ を追加した論理.

命題

$$Np \subseteq NR \subseteq ND$$

これらの包含関係は真な包含関係.

Remark

- K に上の公理・規則を追加した論理は全て KD に一致.

¹ (Kogure and Kurahashi, 2025) では NP として導入されている.

N の拡張論理と FMT-モデルの対応

定義

$L \in \{\mathbf{Np}, \mathbf{NR}, \mathbf{ND}\}$ に対し, FMT-モデル M が L -モデルであるとは, M でそれぞれ以下が成り立つこと.

$$\mathbf{Np} : \forall w \exists w' (w \prec_{\perp} w').$$

$$\mathbf{NR} : \forall \psi \forall w \exists w' (w \prec_{\psi} w').$$

$$\mathbf{ND} : \forall \psi \forall w \exists w' (w \prec_{\psi} w' \ \& \ w \prec_{\neg\psi} w').$$

定理 (Kurahashi, 2024)

- $\mathbf{NR} \vdash \varphi \iff$ 任意の NR-モデル M で $M \models \varphi$.

定理 (Kogure and Kurahashi, 2025)

- $\mathbf{Np} \vdash \varphi \iff$ 任意の Np-モデル M で $M \models \varphi$.
- $\mathbf{ND} \vdash \varphi \iff$ 任意の ND-モデル M で $M \models \varphi$.

目次

- ① 背景 1 : 様相論理 N
- ② 背景 2: 論理の計算複雑性
- ③ 研究結果

背景 2. 論理の計算複雑性

充足可能性判定問題

Given : 論理式 φ

Question : 論理 L で φ は充足可能 ($L \models \neg\varphi$) か?

Cook-Levin の定理 (Cook, 1971), (Levin, 1973)

CI の充足可能性判定問題 (SAT) は NP 完全.

- 単一様相論理の計算複雑性は NP と PSPACE の境界の状況に深く関わる.

定理 (Ladner, 1977)

K, KT, S4 は PSPACE 完全. S5 は NP 完全.

背景 2. 制限のある計算複雑性

- 論理式に様々な制限を課した場合の複雑性も調べられている。

論理式の制限の例

- 使用する演算子 ($\wedge$ のみに制限等)
- 論理式の形 (ホーン節等)
- 命題変数の個数
 - 命題変数なし (closed fragment)

背景 2. Closed fragment

Closed fragment の充足可能性判定問題

Given : 閉論理式 φ

Question : 論理 L で φ は充足可能 ($L \models \neg\varphi$) か？

Closed fragment の計算複雑性の状況

Logic	制限なし	closed fragment
CI	NP 完全	P
K	PSPACE 完全	PSPACE 完全 ¹
GL	PSPACE 完全	P ¹

ただし GL は K に公理 $\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$ を追加した論理。

- 制限のない計算複雑性とも組み合わせて考察することでその論理の特性を見出すことができる。

¹ (Chagrov and Rybakov, 2003) による結果

研究課題. N の計算複雑性の状況

Logic	制限なし	closed fragment
CI	NP 完全	P
N	???	???
K	PSPACE 完全	PSPACE 完全
Np	???	???
NR	???	???
ND	???	???
KD	PSPACE 完全	P

- N は K と CI の中間にある論理であり，
NP 完全性と PSPACE 完全性の二つの論理の狭間に位置．

研究課題. N の計算複雑性の状況

Logic	制限なし	closed fragment
CI	NP 完全	P
N	???	???
K	PSPACE 完全	PSPACE 完全
Np	???	???
NR	???	???
ND	???	???
KD	PSPACE 完全	P

問題

- 論理 N や N の拡大では計算複雑性の状況は？
K や KD と比べてどう変化するか。
 - 必然化則 (Nec) は計算複雑性にどのような影響があるのか。
- closed fragment の複雑性の状況は？

目次

- ① 背景 1 : 様相論理 N
- ② 背景 2: 論理の計算複雑性
- ③ 研究結果

研究結果

- FMT-モデル上での議論を (特に各論理の計算複雑性の Upper Bound を取る時に) 利用して以下の表に示す結果が得られた.
- $N \oplus \gamma$ を N に論理式 γ を公理として追加した論理とする.

主結果

γ を閉論理式とし, $N \oplus \gamma$ は無矛盾であるとする.

Logic	制限なし	closed fragment
N	NP 完全	NP 完全
$N \oplus \gamma$	NP 完全	NP 完全
NR	NP 完全	P
ND	NP 完全	P

研究結果 : Upper Bound

(例): $N \in NP$ の証明

- FMT-モデルでの充足可能性の分析の流れを以下の命題論理式 $B_N(\varphi)$ で写し取り, N での φ の充足可能性判定を CI での $B_N(\varphi)$ の充足可能性判定へ帰着.

$$B_N(\varphi, s) := \underbrace{(\varphi, s)^\circ}_{(i)} \wedge \underbrace{\bigwedge_{\Box\psi \in \text{Sfc}(\varphi)} (b^{s+\psi} \vee B_N(\neg\psi, s + \psi))}_{(ii)}$$

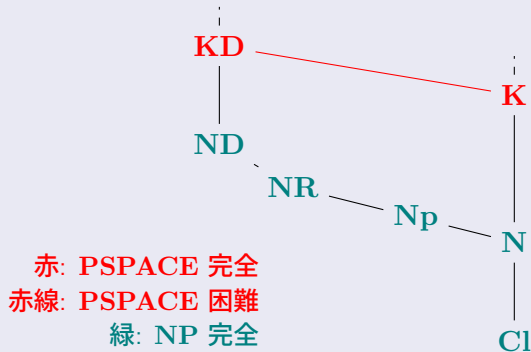
各論理式の部分はそれぞれ,

- (i) 各点でブール結合に関しては真理値割当てが正しく行われている.
- (ii) $w \not\models \Box\psi$ ならば w から $w' \models \psi$ を満たすような $w' \in \psi$ -関係で到達可能.

という FMT-モデルの機構を写し取っている.

研究結果の考察

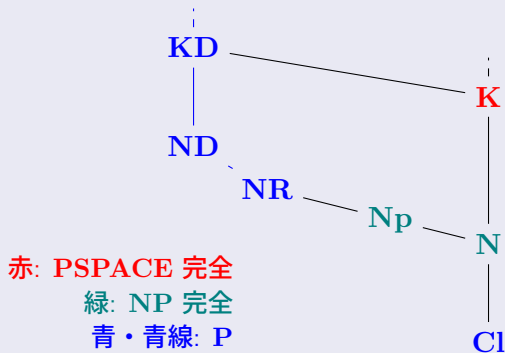
制限なしの場合の計算複雑性の状況



- N は K と比べて複雑性が低下.
- K 公理が複雑性の上昇に強く関与.

研究結果の考察

Closed fragment の場合の計算複雑性の状況



- Closed fragment では N_p と NR の間に差。

Future Work

N の閉論理式公理以外による拡大の計算複雑性

N に以下の公理・規則を追加した論理の計算複雑性はどうか。

- 公理 4: $\Box p \rightarrow \Box \Box p$.
- 公理 $\text{Acc}_{m,n}$: $\Box^n p \rightarrow \Box^m p$
- 公理 C: $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$

N に対する他の意味論からのアプローチ

- (Kogure and Kurahashi, 2026) で N を含めた多くの様相論理を扱う新たな意味論として closure model が提案されている。

各論理の区間の状況

- 例えば, $\text{NR} \subseteq L \subseteq \text{ND}$ を満たす論理は全て NP 完全か？
それとも PSPACE 困難な論理が存在するか？

参考文献 I

- [Chagrov and Rybakov, 2003] Chagrov, A. and Rybakov, M. (2003).
How Many Variables Does One Need to Prove PSPACE-hardness of Modal Logics.
In Advances in Modal Logic. Vol. 4, pages 71–82. King's Coll. Publ., London.
- [Cook, 1971] Cook, S. A. (1971).
The complexity of theorem-proving procedures.
In Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing,
Stoc '71, pages 151–158, New York, NY, USA. Association for Computing
Machinery.
- [Fitting et al., 1992] Fitting, M. C., Marek, V. W., and Truszczyński, M. (1992).
The Pure Logic of Necessitation.
Journal of Logic and Computation, 2(3):349–373.
- [Kogure and Kurahashi, 2025] Kogure, H. and Kurahashi, T. (2025).
Modal logical aspects of provability predicates and consistency statements.
- [Kogure and Kurahashi, 2026] Kogure, H. and Kurahashi, T. (2026).
Modal logics of conjunctively closed provability predicates.

参考文献 II

[Kurahashi, 2024] Kurahashi, T. (2024).

The provability logic of all provability predicates.

Journal of Logic and Computation, 34(6):1108–1135.

[Ladner, 1977] Ladner, R. E. (1977).

The Computational Complexity of Provability in Systems of Modal Propositional Logic.

SIAM Journal on Computing, 6(3):467–480.

[Levin, 1973] Levin, L. A. (1973).

Universal enumeration problems.

Problemy Peredači Informacii, 9(3):115–116.